Interrogation n°8 – Espaces préhilbertiens
(sujet A)

NOM : .... Prénom : .... Note :

1. Soit E un espace préhilbertien dont on note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Scwharz (avec le cas d'égalité).

2. Soit E un espace préhilbertien dont on note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire. Soit X une partie de E. Rappeler la définition ensembliste de $X^\perp$. Que peut-on dire entre X et $(X^\perp)^\perp$ (sans le démontrer) ?

3. On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique. On pose

$$u_1 = (1,1,0) \qquad u_2 = (1,0,1) \qquad F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$$

   (a) Construire une base orthonormée de F par l'algorithme de Gram-Schmidt.
   (b) Déterminer le projeté orthogonal de $v = (1,2,3)$ sur F, puis la distance de v à F.

Interrogation n°8 – Espaces préhilbertiens
(sujet B)

NOM : .... Prénom : .... Note :

1. Compléter les identités remarquables suivantes (pour la seconde, on ne donnera qu'une seule expression, au choix) :

   $\|x+y\|^2 = \ldots\ldots$

   $\langle x \,|\, y\rangle = \ldots\ldots$

2. Soit E un espace préhilbertien dont on note $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ le produit scalaire. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Scwharz (avec le cas d'égalité).

3. Soit E un espace préhilbertien dont on note $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ le produit scalaire. Soit F et G deux s.e.v. de E. Montrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.